Agrégation Interne
2012-2013
Dominique Castella

Série $n^0 2$
Changements de bases et réduction des matrices

I Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
Déterminer l'ensemble des $B \in M_n(\mathbb{R})$, telle que $AB = BA$.

II Soient A et B deux matrices de $M_{3n}(\mathbb{C})$ de rang $2n$ telles que $A^3 = B^3 = 0$. Montrer que A et B sont semblables.

III Donner deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$ telles que AB soit diagonalisables et BA ne le soit pas.

IV 1) Soient $n \geq m$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,m}(K)$, P et Q les polynômes caractéristiques de AB et de BA.
Montrer que $X^n P = X^m Q$. On pourra utiliser les matrices d'ordre $n+m$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} B & I_n \\ XI_m & 0 \end{pmatrix} \ et \ A_1 = \begin{pmatrix} A & -I_m \\ -XI_n & B \end{pmatrix}$$

2) En déduire que si A et B sont deux matrices d'ordre n, AB et BA ont les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.

V On considère trois endomorphismes u, v, w d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n, tels que $u \circ w = w \circ u$, $v \circ w = w \circ v$ et $u \circ v - v \circ u = w$.
a) Montrer que w est nilpotent.
b) Prouver que u, v, w ont un vecteur propre commun.
c) En déduire l'existence d'une base commune de trigonalisation pour ces trois endomorphismes.

VI A) 1) Vérifier que si $A \in Gl_n(\mathbb{Z})$ est d'ordre fini ($\exists m \in \mathbb{N},\ A^m = I_n$), elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que ses valeurs propres sont des racines de l'unité.
2) Soit $A \in Gl_2(\mathbb{Z})$ et $P_A(X) = X^2 - bX + d$, son polynôme caractéristique.
a) Montrer que $d = 1$, ou $d = -1$.
b) Vérifier que si $b^2 - 4d < 0$, d vaut nécessairement 1 et en déduire les valeurs possibles pour b. Montrer que, dans ce cas, A est d'ordre fini.
c)Montrer que si $b^2 - 4d \geq 0$, et si A est d'ordre fini, ses valeurs propres appartiennent à $\{1, -1\}$.
3) Montrer que tous les éléments d'ordre fini de $Gl_2(\mathbb{Z})$ sont d'ordre 1,2,3,4 ou 6.

VII Soit K un corps fini de cardinal q.
1) Montrer que q est une puissance d'un nombre premier p.
2) Déterminer le cardinal du groupe $Gl_n(K)$.

VIII 1) Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
Ce résultat est-il aussi valable sur $\mathbb{R}$?
2) Montrer que les matrices diagonalisables inversibles forment une partie dense de $M_n(\mathbb{C})$.

IX 1) Soit M une matrice trigonalisable de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale O et une matrice triangulaire supérieure T telles que $M = OT^tO$.
2) Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices trigonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice M. On pose $M_k = O_kT_k^tO_k$, $O_k \in O_n(\mathbb{R})$, T_k triangulaire supérieure.
Montrer qu'il existe une sous-suite $(T_{\sigma(k)})$ qui converge et en déduire que le polynôme caractéristique de M est scindé.
3) Déterminer dans $M_n(\mathbb{R})$ l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables.