GOOGLE

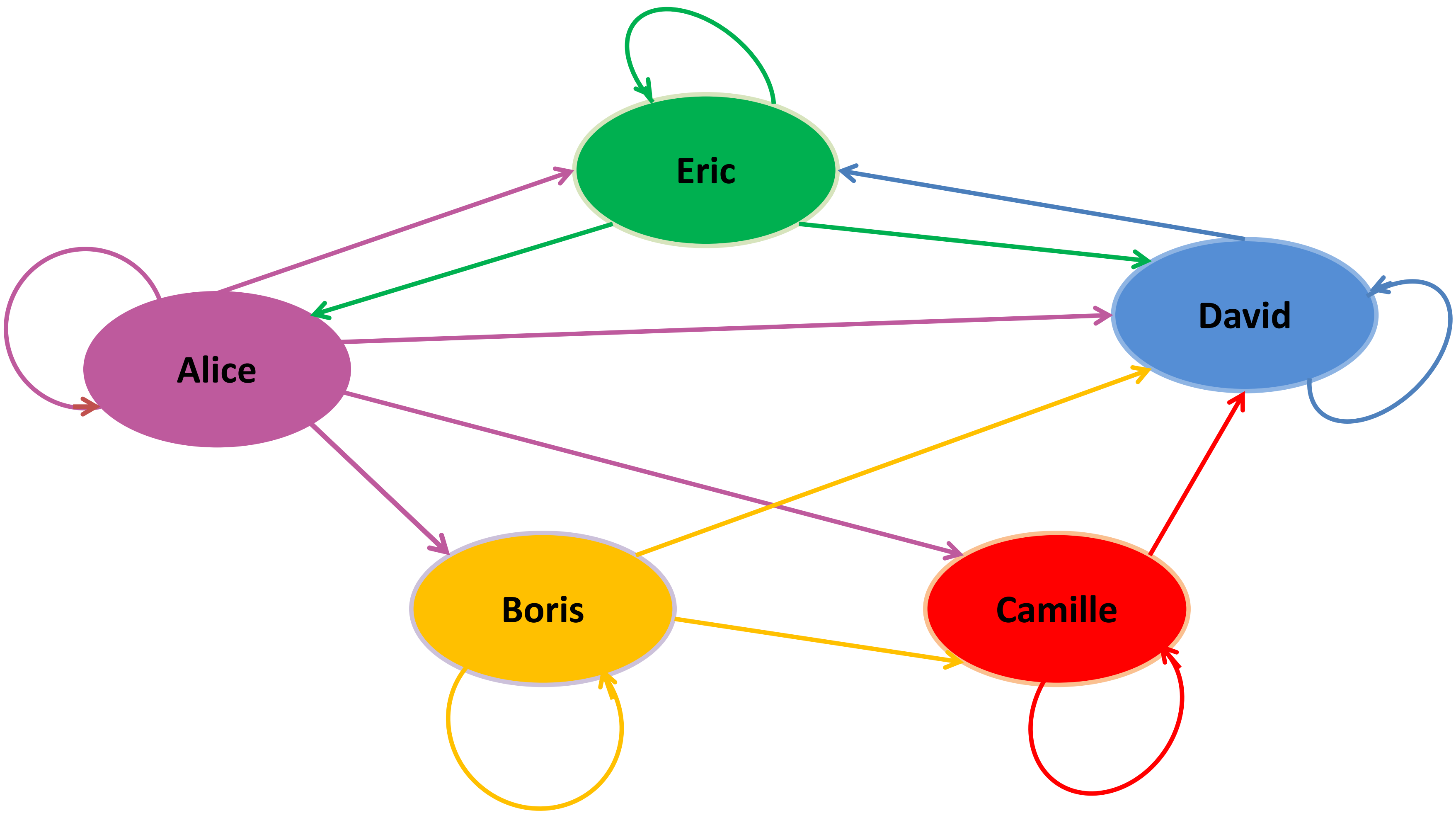
Nombre de pages sur internet : $\sim 10\,000\,000\,000 = 10^{10}$

Exemples :

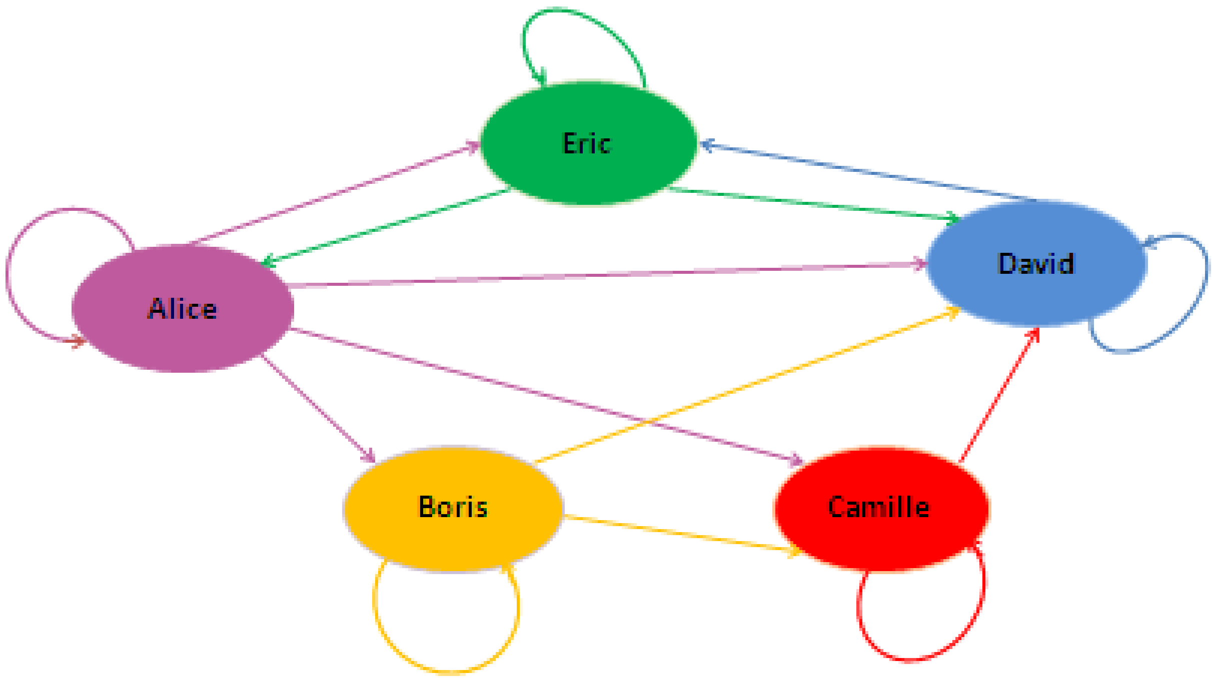
- 86 400 000 résultats pour **Maths**
- **11 500 000** résultats pour **MATh. en. JEANS**

Comment **classer** ces pages (non commerciales) pour mettre en priorité les plus intéressantes ?

Analogie: qui est le plus fort en sport ?



Nombre de votes obtenus



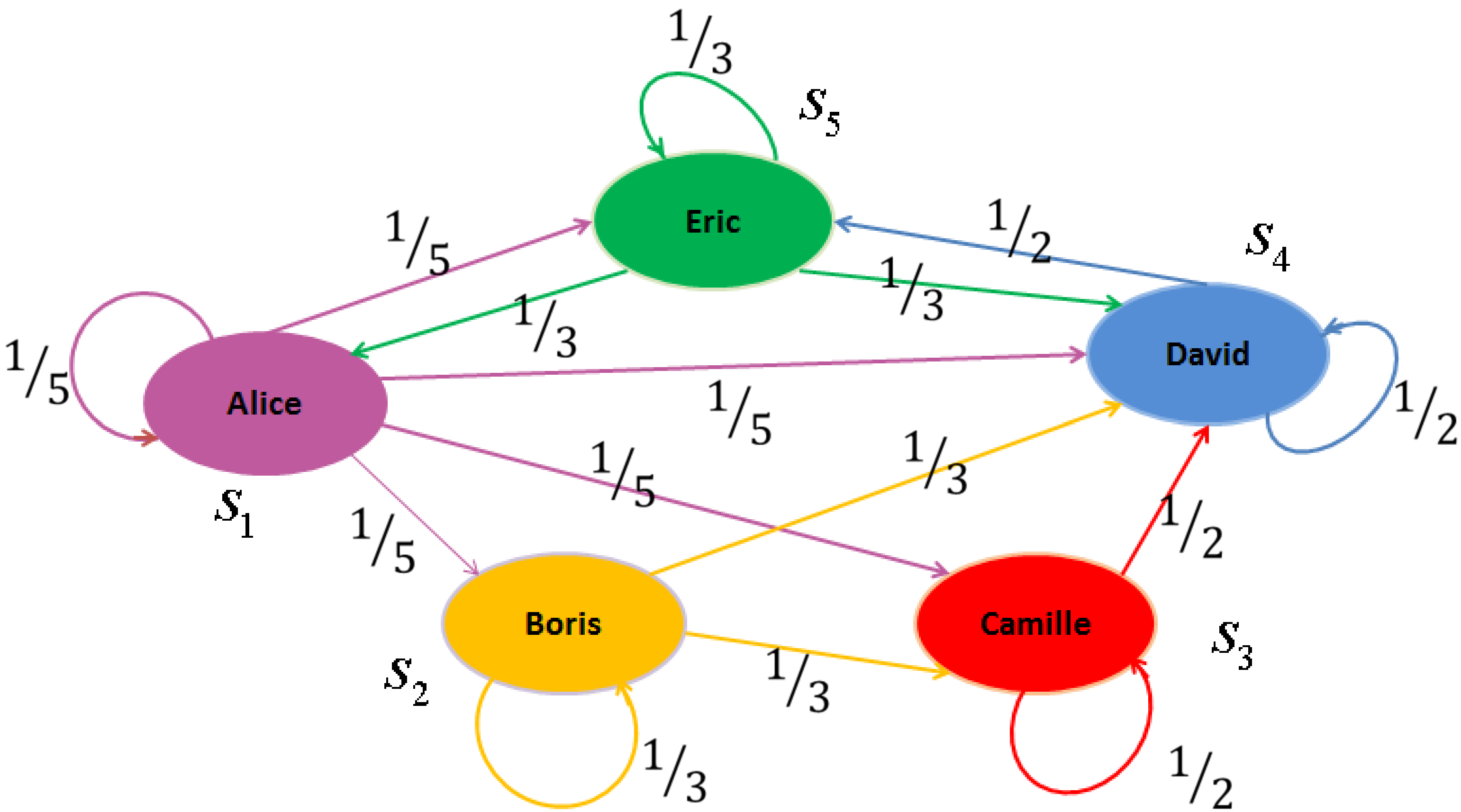
Alice	Boris	Camille	David	Eric
2	2	3	5	3

Dans le cas présent nous ne pouvons pas déterminer de classement .

Règle 1

- Celui qui vote pour tous a un avis non tranché donc son vote a moins d'impact :

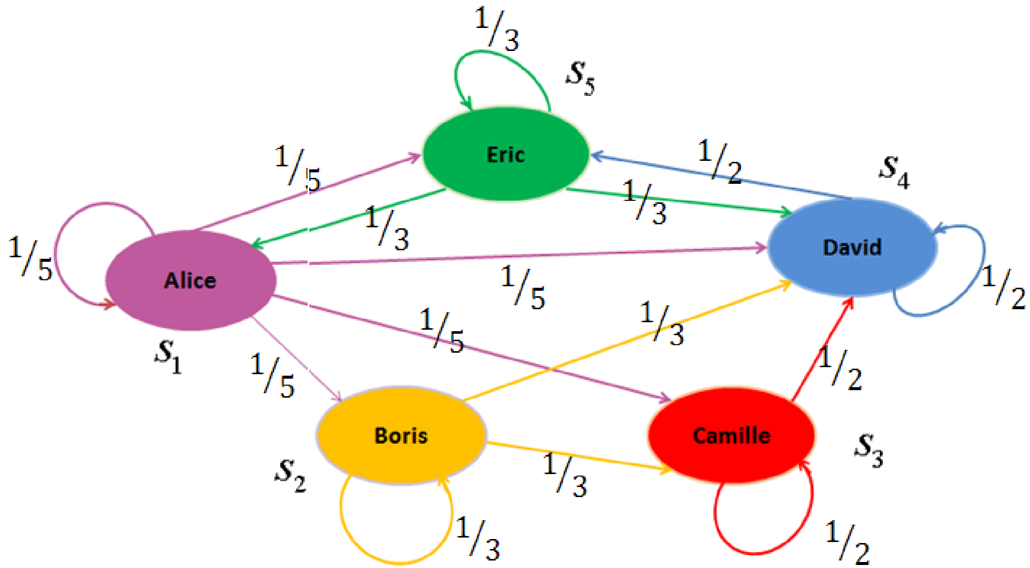
le vote de chacun est partagé.



Règle 2

- Tous les votes n’ont pas la même importance :

Les réponses de quelqu’un de bon ont plus de poids que les réponses d’un autre



S_1 : score d'Alice
S_2 : score de Boris
S_3 : score de Camille
S_4 : score de David
S_5 : score d'Eric

$$\begin{cases} s_1 = \frac{1}{5}s_1 + \frac{1}{3}s_5 \\ s_2 = \frac{1}{5}s_1 + \frac{1}{3}s_2 \\ s_3 = \frac{1}{5}s_1 + \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{2}s_3 \\ s_4 = \frac{1}{5}s_1 + \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{2}s_3 + \frac{1}{2}s_4 + \frac{1}{3}s_5 \\ s_5 = \frac{1}{5}s_1 + \frac{1}{2}s_4 + \frac{1}{3}s_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{5}s_1 + \frac{1}{3}s_5 = 0 \\ \frac{1}{5}s_1 - \frac{2}{3}s_2 = 0 \\ \frac{1}{5}s_1 + \frac{1}{3}s_2 - \frac{1}{2}s_3 = 0 \\ \frac{1}{5}s_1 + \frac{1}{3}s_2 + \frac{1}{2}s_3 - \frac{1}{2}s_4 + \frac{1}{3}s_5 = 0 \\ \frac{1}{5}s_1 + \frac{1}{2}s_4 - \frac{2}{3}s_5 = 0 \end{cases}$$

Résolution

```
(%i6) linsolve([0=-4/5*s_1+1/3*s_5, 0=1/5*s_1-2/3*s_2, 0=1/3*s_2-1/2*s_3+1/5*s_1, 0=
solve: dependent equations eliminated: (5)
```

$$(\%o6)\ [s\_1=\%r4, s\_2=\frac{3\ \%r4}{10}, s\_3=\frac{3\ \%r4}{5}, s\_4=\frac{14\ \%r4}{5}, s\_5=\frac{12\ \%r4}{5}]$$

$$S=\left\{s_1\,;s_2=\frac{3}{10}s_1\,;s_3=\frac{3}{5}s_1\,;s_4=\frac{14}{5}s_1\,;s_5=\frac{12}{5}s_1\right\}$$

Pour $s_1=10$

$s_2=3$

$s_3=6$

$s_4=28$

$s_5=24$

Classement

David

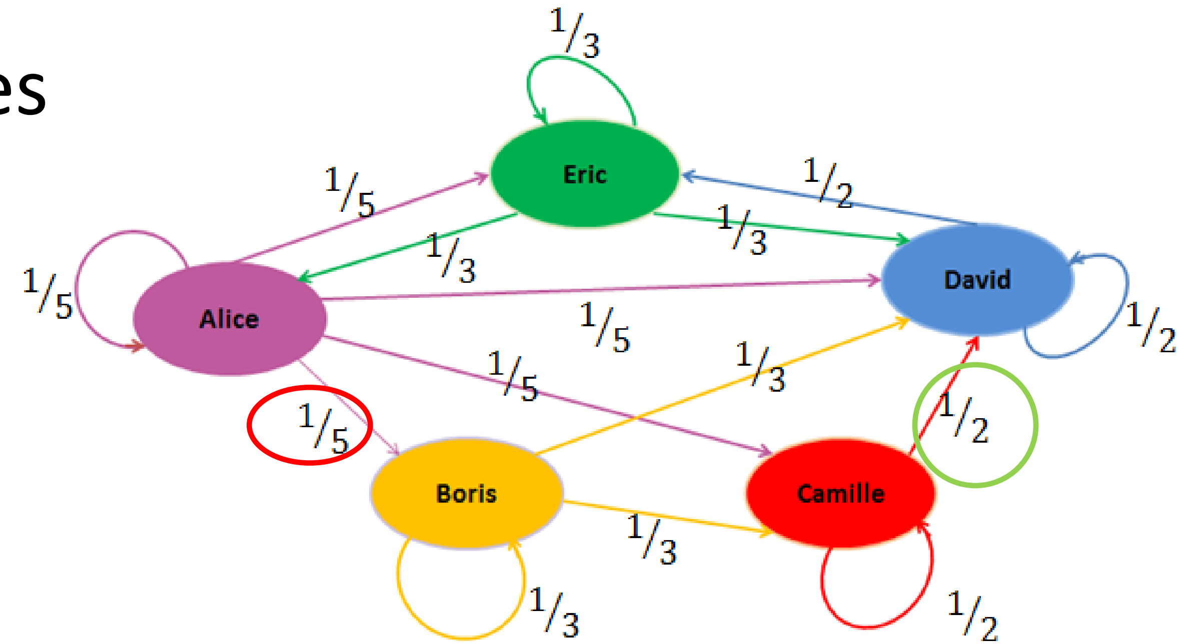
Eric

Alice

Camille

Boris

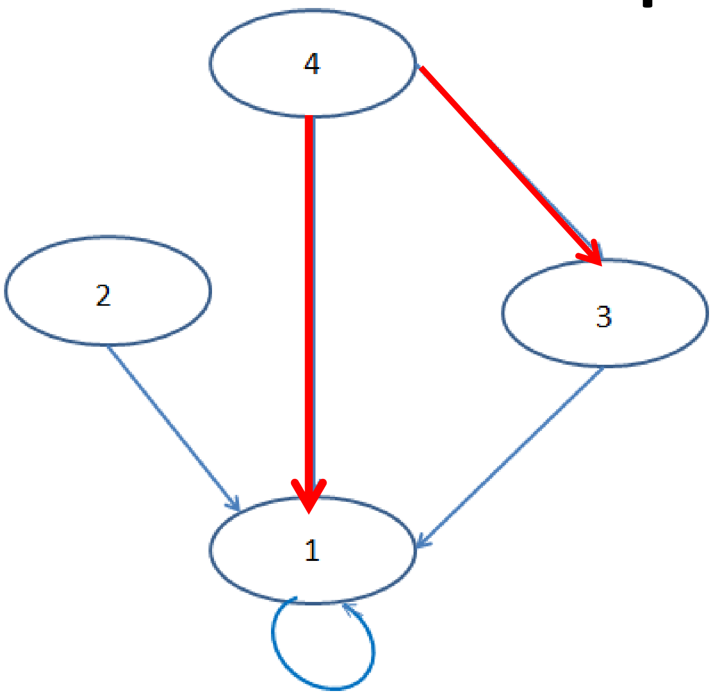
Avec les matrices



	Alice	Boris	Camille	David	Eric
Alice	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
Boris	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
Camille	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0
David	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
Eric	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exemple : vers le web

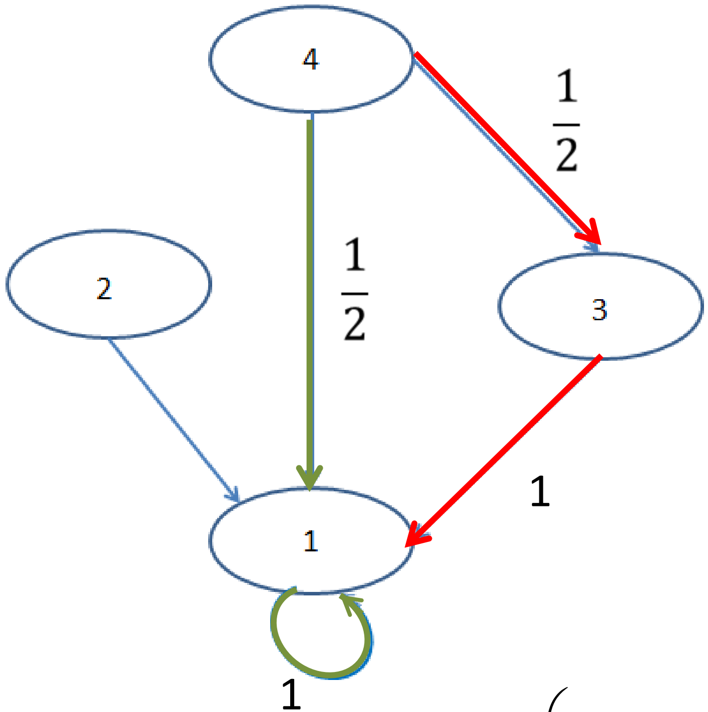


$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Probabilité de passer de 4 à 1

Probabilité de passer de 4 à 3

Position initiale en 4 : $P=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $AP=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

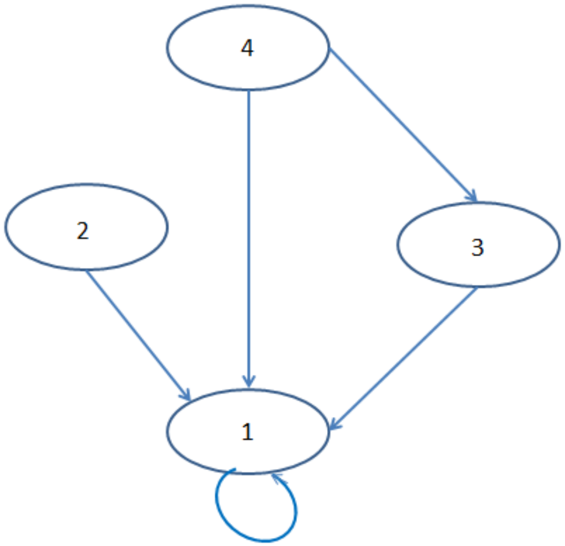


$$P' = AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors $AP' = A \times AP = A^2P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Probabilité d'être en 1 en 2 étapes

Ainsi de suite …



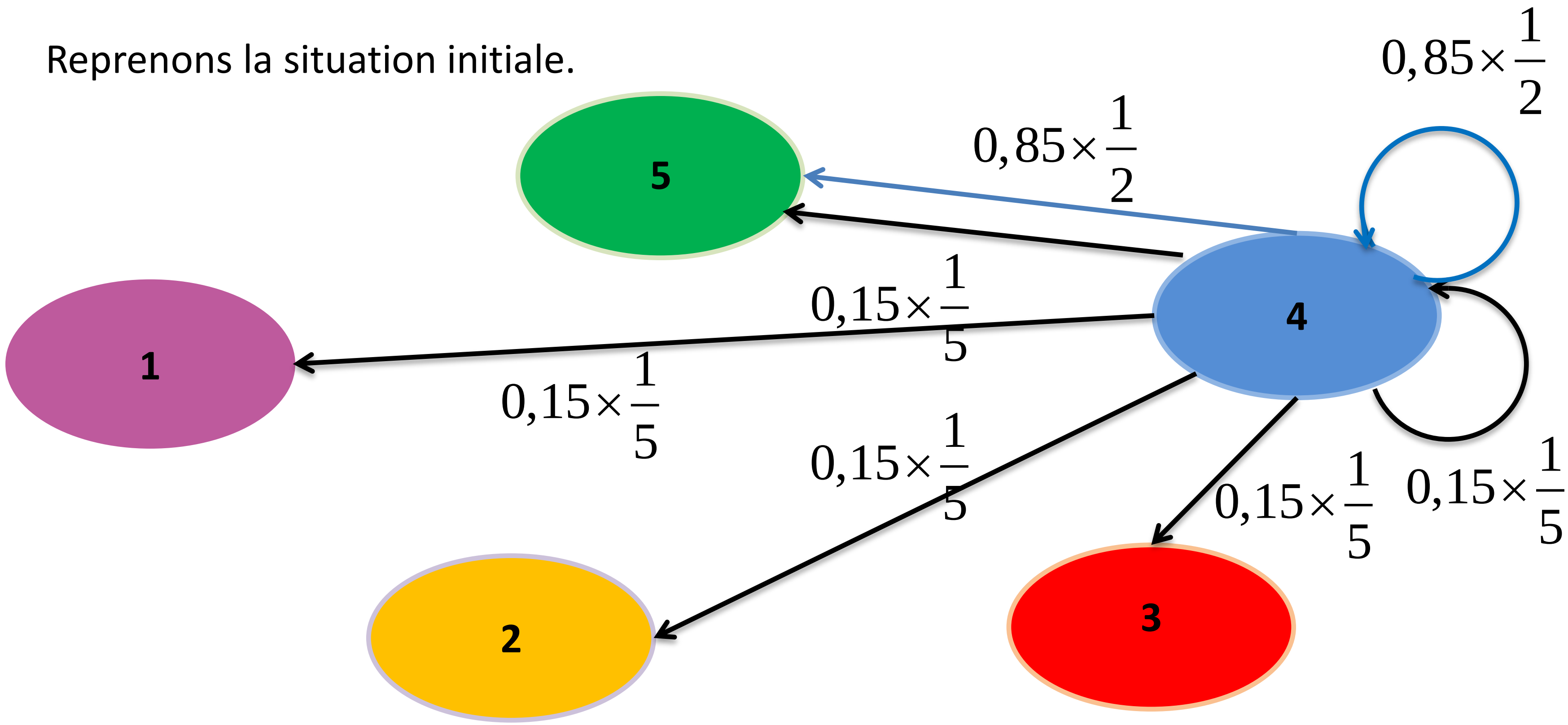
$$A \times AP' = A \times A \times AP = A^3 P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les **puissances de la matrice** correspondent au **nombre d'itérations** (étapes).

Avec cet exemple, on resterait donc sur la page 1. Ce qui n'est pas très réaliste.

Modifications

Reprenons la situation initiale.



<u>Modèle plus réaliste</u> :

- Dans 85 % des cas on suit un lien pour passer d'une page à l'autre
- Dans 15 % des cas on choisit une page au hasard

Nouvelle matrice

$$A = 0,85 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + 0,15 \times \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{100} & \frac{3}{100} & \frac{3}{100} & \frac{47}{150} \\ \frac{1}{5} & \frac{47}{150} & \frac{3}{100} & \frac{3}{100} & \frac{3}{100} \\ \frac{1}{5} & \frac{47}{150} & \frac{91}{200} & \frac{3}{100} & \frac{3}{100} \\ \frac{1}{5} & \frac{47}{150} & \frac{91}{200} & \frac{91}{200} & \frac{47}{150} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{100} & \frac{3}{100} & \frac{91}{200} & \frac{47}{150} \end{pmatrix}}$$

Itération

```
float(A^^38);
```

$$\begin{bmatrix} 0.13601959002417 & 0.13601959002417 & 0.13601959002417 & 0.13601959002417 & 0.13601959002417 \\ 0.07412557168523 & 0.07412557168523 & 0.07412557168524 & 0.07412557168525 & 0.07412557168524 \\ 0.1289140472496 1 & 0.1289140472496 1 & 0.1289140472496 1 & 0.1289140472496 1 & 0.1289140472496 1 \\ 0.3683657512516 & 0.3683657512516 & 0.3683657512516 & 0.3683657512516 & 0.3683657512516 \\ 0.2925750343061 & 0.2925750343061 & 0.2925750343061 & 0.2925750343061 & 0.2925750343061 \end{bmatrix}$$

```
float(A^^39);
```

$$\begin{bmatrix} 0.13601959002417 & 0.13601959002417 & 0.13601959002417 & 0.13601959002417 & 0.13601959002417 \\ 0.07412557168524 & 0.07412557168524 & 0.07412557168524 & 0.07412557168524 & 0.07412557168524 \\ 0.12891404724961 & 0.12891404724961 & 0.12891404724961 & 0.12891404724961 & 0.12891404724961 \\ 0.3683657512516 & 0.3683657512516 & 0.3683657512516 & 0.3683657512516 & 0.3683657512516 \\ 0.2925750343061 & 0.2925750343061 & 0.2925750343061 & 0.2925750343061 & 0.2925750343061 \end{bmatrix}$$

```
float(A^^50);
```

$$\begin{bmatrix} 0.13601959002417 & 0.13601959002417 & 0.13601959002417 & 0.13601959002417 & 0.13601959002417 \\ 0.07412557168524 & 0.07412557168524 & 0.07412557168524 & 0.07412557168524 & 0.07412557168524 \\ 0.12891404724961 & 0.12891404724961 & 0.12891404724961 & 0.12891404724961 & 0.12891404724961 \\ 0.3683657512516 & 0.3683657512516 & 0.3683657512516 & 0.3683657512516 & 0.3683657512516 \\ 0.2925750343061 & 0.2925750343061 & 0.2925750343061 & 0.2925750343061 & 0.2925750343061 \end{bmatrix}$$

Classement

```
float(A^^39);
```

$$\begin{bmatrix} 0.13601959002417 & 0.13601959002417 & 0.13601959002417 & 0.13601959002417 & 0.13601959002417 \\ 0.074125577168524 & 0.074125577168524 & 0.074125577168524 & 0.074125577168524 & 0.074125577168524 \\ 0.12891404724961 & 0.12891404724961 & 0.12891404724961 & 0.12891404724961 & 0.12891404724961 \\ 0.3683657512516 & 0.3683657512516 & 0.3683657512516 & 0.3683657512516 & 0.3683657512516 \\ 0.2925750343061 & 0.2925750343061 & 0.2925750343061 & 0.2925750343061 & 0.2925750343061 \end{bmatrix}$$

Classement

Page 4
Page 5
Page 1
Page 3
Page 2

Algorithme

```
# -*- coding: utf-8 -*-

# package pour matrices, tableaux
import numpy as np
from fractions import Fraction

# n=le nombre de pages ; e=coefficient ; p=puissance de la matrice ; A=Matrice i
n=int(input("n="))
e=float(input("e="))
p=int(input("p="))
A=input("A=")

d=float(Fraction(1,n))
D=d*np.ones((n,n))

# Reste de la matrice initiale
for i in range (2,n+1):
    L=input("L=")
    A=np.concatenate((A,L))

# Transforme les lignes en colonnes pour ensuite, faire la matrice avec le coeff
A=np.transpose(A)

B=(1-e)*A+e*D

# On eleve la matrice obtenue à des puissances pour la stabiliser
for i in range (p):
    B=np.dot(B,B)

# Affichage

print B
```