

Un problème en terminale ES

La dynamique des populations

Informations sur le sujet à destination du professeur

« La dynamique des populations s'intéresse au développement numérique de toutes les populations d'êtres vivants, ... » (Wikipédia)

Etudier l'évolution d'une population par le biais d'une modélisation faisant intervenir des fonctions continues dans le temps peut sembler étrange. Car après tout, une population par exemple animale évolue par les naissances et les décès, qui la font augmenter ou diminuer chaque fois d'une unité. Mais si on s'intéresse à une population de grande taille, dans un temps relativement grand, les variations de la population pourront apparaître comme continues.

La population humaine n'est pas statique : le nombre d'individus varie, évolue au cours du temps. Ce comportement est appelé **dynamique de la population**.

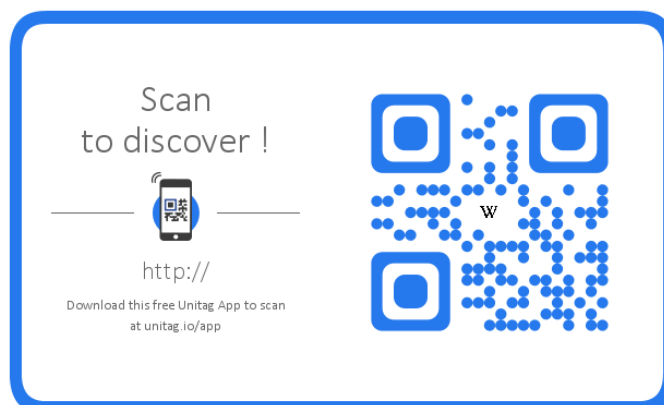
A la lecture des programmes du lycée, on peut constater que la démarche d'investigation doit faire partie de nos méthodes pédagogiques, et les problèmes ouverts sont une excellente façon de la mettre en œuvre. (« La maîtrise des principaux éléments de mathématiques s'exerce essentiellement par la résolution de problèmes, notamment à partir de situations proches de la réalité » extrait du site eduscol.education.fr.) La vidéo est un outil faisant intervenir le numérique de manière innovante afin de développer avec les TICE l'appétence des élèves.



« La plupart des personnes utilisent la farine pour cuisiner, lui il l'utilise pour autre chose, ... »

[Cliquer ici pour voir la suite](#)

Ou flasher le QR-Code



En bleu : Version « formation »

En vert : Les commentaires (sur la mise en œuvre, les outils numérique, la gestion de la classe, ...)

* Prise d'initiative

Euler (1707-1783), **Malthus** (1766-1834) et **Verhulst** (1804-1849) vont s'occuper successivement de créer des modèles d'évolution de populations :

- Euler, vers 1760 (« *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain* »), est conduit à déterminer la population d'une ville à une date donnée. Ses calculs reviennent à étudier une suite géométrique.
- Malthus reprend en 1798 l'idée d'un accroissement exponentiel de la population. Il modélise la population humaine comme une suite géométrique et la capacité de production comme une suite arithmétique. La distorsion entre les deux, le conduit à une proposition de limitation des naissances.

RÉSULTATS OBTENUS PAR MALTHUS :

Date	1750	1850	1918-1927	1960	1974	1987	1999	2010	2022
Population estimée (milliards)	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8

Source : *Mathematical Biology, J.D. Murray, Biomathematics Texts, Springer (1994)*

MESURE RÉELLES (ESTIMATIONS) :

Date	1750	1850	1920	1960	1975	1985	2000	2005	
Population estimée (milliards)	0,63 à 0,69	1,1 à 1,4	1,55 à 1,75	3,0	4,1	4,8	6,1	6,5	

Source : *Wikipedia, d'après le Bureau de recensement des Etats-Unis, et les données de l'Organisation des Nations Unies.*

Le modèle malthusien suppose que :

« *l'accroissement de la population directement proportionnel à l'effectif.* »

Donc si a est le taux annuel de natalité et b est le taux annuel de mortalité.

L'hypothèse de Malthus s'écrit alors :

$$N'(t) = a N(t) - b N(t)$$

Si on pose $k = a - b$, on obtient :

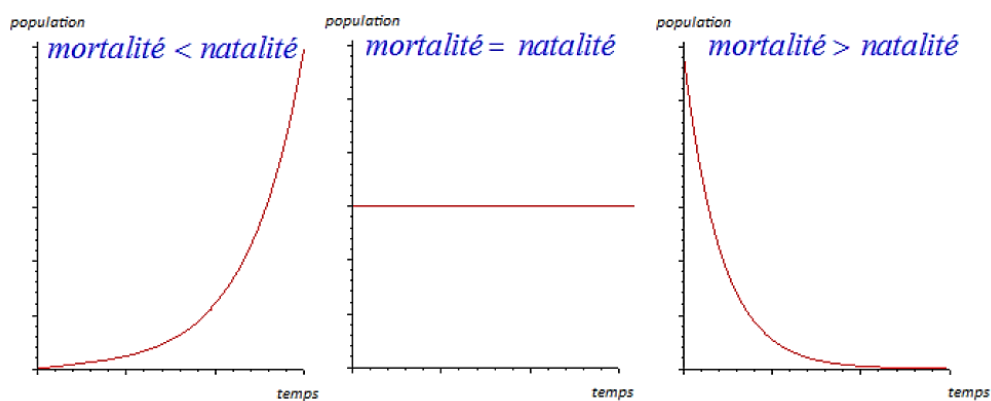
$$N(t) = N(0) e^{k t}$$

Evolutions possibles

développement infini,

stagnation,

et extinction.



En bleu : Version « formation »

En vert : Les commentaires (sur la mise en œuvre, les outils numérique, la gestion de la classe, ...)

* Prise d'initiative

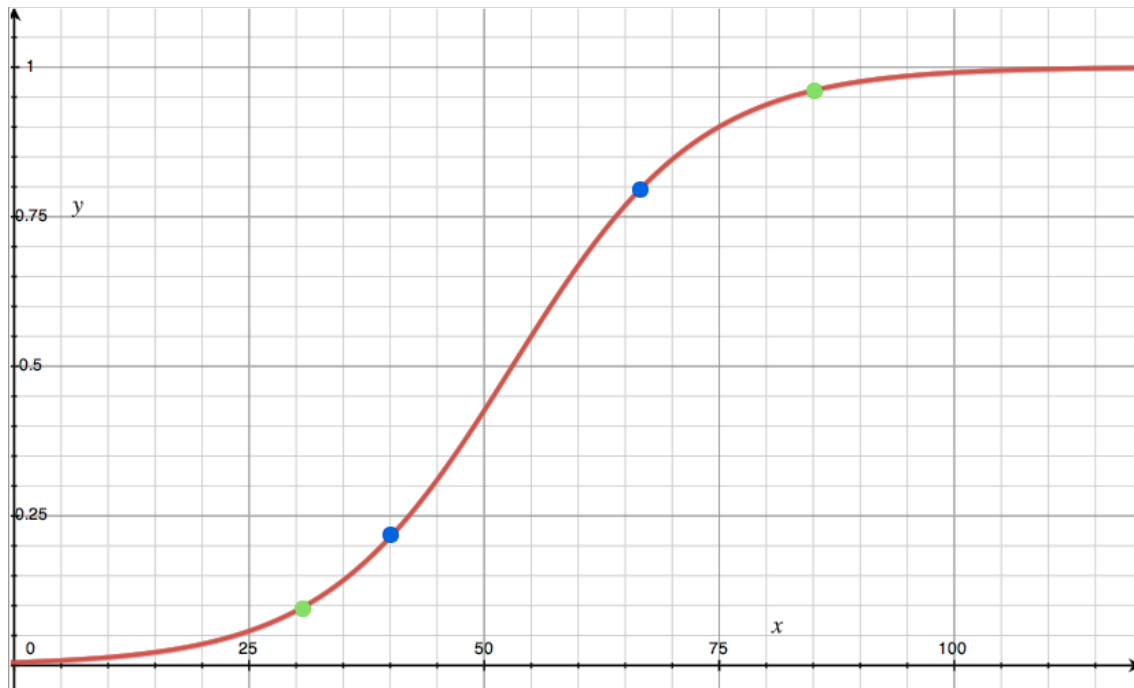
- Le modèle malthusien est remis en cause vers 1840 par Verhulst qui propose un modèle dit logistique qui prend en compte la limitation de la population.
Le principe est simple : l'accroissement de la population n'est proportionnel à la population que pour les petites valeurs de celle-ci. Lorsqu'elle croît, des facteurs limitants apparaissent qui font qu'il y a une population maximale M .

Verhulst postule alors que

« l'accroissement de la population x est proportionnel à la quantité $x(M - x)$. »

Ce modèle lui permet de donner en 1837 une prévision de la population de la France en 1930 de 40 millions, alors qu'elle sera de 41,5 millions en 1931.

(ce modèle ne pouvait pourtant prévoir ni les guerres de 70 et 14, ni la commune, ni la grippe espagnole!).



Représentation graphique d'une fonction logistique

En bleu : Version « formation »

En vert : Les commentaires (sur la mise en œuvre, les outils numérique, la gestion de la classe, ...)

* Prise d'initiative

Version évaluation avec prise d'initiative

Le Ténébrion meunier (ou vers de farine) est un insecte de l'ordre des coléoptères, de la famille des ténébrionidés. Il est capable de vivre dans des denrées stockées très sèches, notamment dans la farine, d'où son nom de meunier.

L'élevage des vers de farine est très simple et ne requiert que très peu d'entretien.



Un particulier décide d'élever des vers de farine dans une boîte, dans laquelle il dispose seulement au départ 200 grammes de farine et 500 vers (c'est à dire 5 centaines de vers) et il laisse se faire les choses.



* Partie A

Le particulier étudie l'évolution du nombre de vers et obtient les résultats ci-dessous :

Nombre de jours	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de vers en centaines	5	7,49	11,22	16,81	25,18	37,72	56,50	84,64	126,78	189,92	284,50

* 1. A votre avis cette évolution pourrait suivre quel type de croissance ? Une croissance

- du type inverse,
- du type logarithmique,
- du type carré,
- du type cube
- du type affine
- ou autres ...

et expliquez votre choix.

* 2. Le particulier remarque la modélisation suivante :

« Chaque jour la population augmente d'environ 50% ».

* a. Cette modélisation vous paraît-elle pertinente ? Expliquez pourquoi.

* b. Traduisez à l'aide d'une formule mathématique la relation qui donne le nombre de vers d'un jour donné en fonction du nombre de vers du jour précédent.

En bleu : Version « formation »

En vert : Les commentaires (sur la mise en œuvre, les outils numérique, la gestion de la classe, ...)

* Prise d'initiative

- * c. Selon ce modèle, quel pourrait être théoriquement le nombre de centaines de vers après 15 jours ? (arrondir le nombre à la centaine de vers).

Version « en formation »

- * d. Question bonus : A partir d'une connaissance mathématique étudiée cette année, écrivez une formule qui vous permettrait de calculer rapidement le nombre théorique de centaines de vers au bout de 50 jours ou 125 jours ou 153 jours ...
- * 3. Comment se comporterait réellement le nombre de vers si on les laissait évoluer dans cette même boîte très longtemps (plusieurs semaines, plusieurs mois, plusieurs années ...) ?

Commentaires de mise en œuvre :

Question ouverte donnant l'occasion de mettre en place un débat :

- position individuelle argumentée en groupe (2 à 4) ;
- séance plénière qui permet de faire le point sur toute la partie A et annonce la partie B ;
- débat argumenté entre quelques groupes représentatif des échanges au sein de la classe.

Partie B

On s'intéresse à l'évolution du nombre de vers sur une très longue période.

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), on décide de modéliser l'évolution de la population de vers par la fonction g qui à un instant t donné, donne $g(t)$ égal au nombre de vers en centaines par la formule suivante :

$$g(t) = \frac{330}{1 + 65 e^{-0,4 t}}$$

La fonction g est une fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$

- * 1. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant pour le calcul de la fonction dérivée de g .

$$\text{derive}(330/(1+65* \exp(-0.4* t)), t) = \frac{8580e^{-0.4t}}{(1 + 65e^{-0.4t})^2}$$

A partir de ce résultat, dresser le tableau de variation de la fonction g .

Version « en formation »

- * 1. a. Un élève utilise un logiciel de calcul formel et obtient le résultat suivant :

$$\text{derive}(330/(1+65* \exp(-0.4* t)), t) = \frac{8580e^{-0.4t}}{(1 + 65e^{-0.4t})^2}$$

A quoi cela lui sert il ?

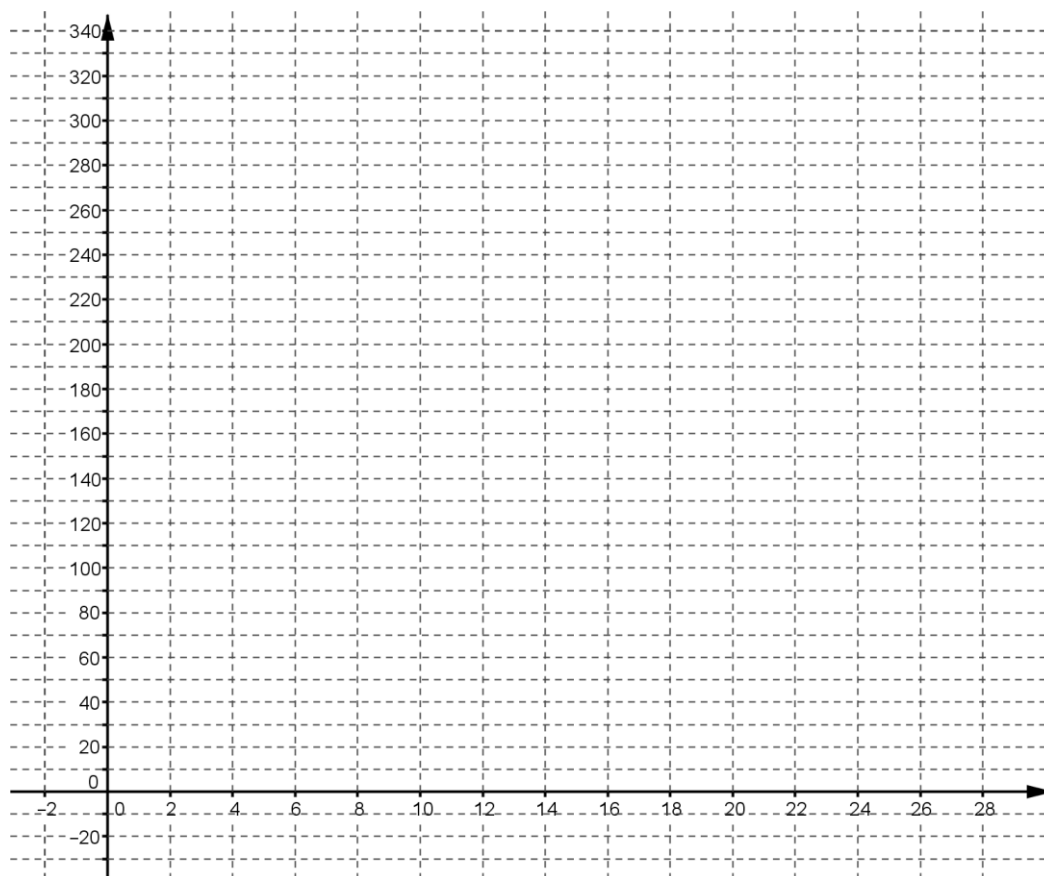
- Retrouver $g'(t)$ par le calcul.
- Etudier le sens de variation de la fonction g .

- 2. Tracer la courbe représentative de la fonction g dans le repère ci-dessous.

En bleu : Version « formation »

En vert : Les commentaires (sur la mise en œuvre, les outils numérique, la gestion de la classe, ...)

* Prise d'initiative



- * 3. Déterminer le nombre de jours nécessaire pour que le nombre de vers dans la boîte soit supérieur à 30 000, en explicitant la méthode choisie.
- 4. Peut-on prévoir, à l'aide de ce modèle, une stabilisation du nombre de vers et à partir de quel moment ?

Version « en formation »

- * 5. Choisissez le modèle qui vous paraît le mieux décrire l'évolution du nombre de vers dans la boîte. Trouver un camarade qui a choisi l'autre modèle et essayez de le convaincre, en argumentant, que le vôtre est le meilleur modèle.

Indications de conduite de classe pour le professeur :

Sondage rapide pour former des binômes, 5 + 5 min d'échanges par binôme ; question : un élève a-t-il changé d'avis ? y a-t-il un avis qui domine ?

Cette partie est ouverte à toute organisation mettant les élèves en situation d'argumenter leur point de vue, de s'approprier et de critiquer le point de vue contraire, d'arrêter un choix définitif personnel.

Le professeur pourra filmer (tablette, téléphone) des débats et des argumentaires particulièrement intéressants, après étude, sélectionner ceux à présenter à toute la classe en vue d'une critique constructive des éléments de langage et de la communication, ainsi que la force des arguments utilisés (comparaison sur des graphiques, données, calculs, etc.).

En bleu : Version « formation »

En vert : Les commentaires (sur la mise en œuvre, les outils numérique, la gestion de la classe, ...)

* Prise d'initiative

Critères dévaluation

Questions	Compétences évaluées	Indicateurs de réussite
<p>Partie A (*Prise d'initiative : concerne tout la partie A)</p> <p>1. A votre avis cette évolution pourrait suivre quel type de croissance ? Une croissance</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ du type inverse, ▪ du type logarithmique, ▪ du type carré, ▪ du type cube ▪ du type affine ▪ ou autres ... <p>et expliquez votre choix.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Modéliser En prenant appui sur les données du tableau, il s'agit de représenter la situation à l'aide d'un modèle mathématique. De valider ou invalider un modèle. ▪ Chercher Il faut extraire, organiser et traiter les informations du tableau. Il s'agit d'expérimenter en utilisant éventuellement des outils logiciels des modèles rencontrés durant l'année. ▪ Représenter L'élève peut changer de registre, passer d'une représentation en données numériques à une autre, en nuage de points par exemple. <p>Dans cette question l'élève a la liberté de se représenter la situation de différentes manières, à l'aide d'outils numériques (tableur, graphique ...), en plaçant un nuage de point, un calculant les rapports des termes ...</p> <p><u>Version « en formation » :</u> On pourra évaluer la compétence</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Communiquer (oral ; écrit) Après un moment de réflexion, demander à certains élèves de développer leur argumentation mathématique en s'exprimant avec clarté à l'oral (on choisirait judicieusement les élèves proposant une réponse en partant de l'artisanale à l'experte) ou à l'écrit 	<p>L'élève fait appel à ses connaissances acquises au long des années de lycée, sur les différentes croissances rencontrées. Il doit les confronter à une situation donnée, s'engager dans une démarche et expérimenter afin de prendre une décision.</p> <p>On valorisera :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ les modélisations mettant en avant une évolution croissante (qu'elle soit du type carré, exponentielle ...). ▪ les démarches liées à une représentation graphique, permettant d'écartier certaines croissances. ▪ L'argumentation dans la validation ou l'invalidation d'un modèle. <p>On valorisera les différentes pistes :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Représentation (nuage de point,...) <p>Utilisation d'un logiciel possible, permettant par exemple d'avoir sur le même graphique le nuage de point et les fonctions cube, carré, ... pour émettre une conjecture</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Recherche d'une relation entre les termes (quotient, ...) ▪ Allusion aux suites. <p>(*Prise d'initiative) L'élève pense à faire appel aux termes d'une suite.</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Allusion aux suites géométriques avec mise en évidence de la raison. <p>Favoriser les échanges, les discussions sur les modèles entre élèves</p> <p>Mettre en avant des arguments cohérents et pertinents à l'oral et à l'écrit en utilisant le vocabulaire adapté, acquis tout au long de l'année sur les différents types d'évolution.</p>

En bleu : Version « formation »

En vert : Les commentaires (sur la mise en œuvre, les outils numérique, la gestion de la classe, ...)

* Prise d'initiative

Questions	Compétences évaluées	Indicateurs de réussite
<p>2. Le particulier remarque la modélisation suivante : « Chaque jour la population augmente d'environ 50% ».</p> <p>a. Cette modélisation vous paraît-elle pertinente ? Expliquez pourquoi.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Modéliser Valider ou invalider un modèle. ▪ Calculer Contrôler les calculs (au moyen d'ordres de grandeur, ou d'encadrement). ▪ Chercher Analyser un problème. 	<p>Dans cette question on valorisera :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ L'analyse et traduction l'expression « augmente d'environ 50% » en terme de taux d'évolution et de coefficient multiplicateur. ▪ La relation entre un CM > 1 et une évolution croissante cohérente avec les données. ▪ Les comparaisons des premiers termes. ▪ Les appréciations avec les données réelles.
<p>b. Traduisez à l'aide d'une formule mathématique la relation qui donne le nombre de vers d'un jour donné en fonction du nombre de vers du jour précédent.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Raisonner Bâtir un raisonnement. ▪ Représenter Passer d'un mode de représentation à un autre. ▪ Modéliser Traduire en langage mathématique une relation réelle. 	<p>On valorisera :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ La démarche faisant intervenir l'outil suites numériques L'élève qui prendra l'initiative de mettre en place une suite en précisant ce que représente n et u_n par exemple. ▪ L'utilisation des suites géométriques. ▪ L'utilisation du coefficient multiplicateur comme raison de la suite.
<p>c. Selon ce modèle, quel pourrait être théoriquement le nombre de centaines de vers après 15 jours ? (arrondir le nombre à la centaine de vers).</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Calculer Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel). ▪ Raisonner Bâtir un raisonnement. 	<p>Différentes pistes de solutions possibles :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ La réponse obtenue graphiquement. ▪ La réponse obtenue en calculant les termes les uns après les autres avec $u_{n+1} = 1,5u_n$ jusqu'à u_{15}. ▪ La réponse obtenue à l'aide d'un tableur ou de la table de la calculatrice. ▪ La réponse obtenue à l'aide d'un algorithme. Par exemple la boucle For. ▪ La réponse obtenue après avoir établie la formule u_n en fonction de n.

En bleu : Version « formation »

En vert : Les commentaires (sur la mise en œuvre, les outils numérique, la gestion de la classe, ...)

* Prise d'initiative

Questions	Compétences évaluées	Indicateurs de réussite
<p><u>Dans la version « en formation »</u> d. Question bonus : A partir d'une connaissance mathématique étudiée cette année, écrivez une formule qui vous permettrait de calculer rapidement le nombre théorique de centaines de vers au bout de 50 jours ou 125 jours ou 153 jours ...</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Calculer Organiser les différentes étapes d'un calcul. Evaluer la démarche de l'élève pour aboutir à la relation : $u_n = 5 \times 1,5^n$ ▪ Raisonner Faire appel aux connaissances et savoir en déduire des résultats. ▪ Chercher Reformuler un problème, extraire, organiser et traiter l'information utile, s'engager dans une démarche. 	<p>Il s'agit de mettre en avant l'autonomie de l'élève pour aboutir à la relation de u_n en fonction de n.</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Reformuler un problème : allusion à une relation u_n en fonction de n. ▪ Reconnaître et montrer, de la question b, qu'il s'agit d'une suite géométrique. ▪ Déterminer la raison et le premier terme. ▪ Utiliser ses connaissances sur les suites géométriques pour trouver la relation.
<p>3. Comment se comporterait réellement le nombre de vers si on les laissait évoluer dans cette même boîte très longtemps (plusieurs semaines, plusieurs mois, plusieurs années ...) ?</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Calculer Chercher la limite. ▪ Raisonner Effectuer des inférences (déductives ou inductives). ▪ Communiquer Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral. Critiquer une démarche ou un résultat. 	<p>Différentes pistes possibles :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ En se basant sur le graphique ou le tableur : le nombre de vers pourrait exploser (croissance exponentielle). ▪ Calculer la limite d'une suite géométrique $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ <p><u>Version « en formation »</u> Une question très ouverte, donnant l'occasion de mettre en place un débat pour conforter les arguments.</p>

En bleu : Version « formation »

En vert : Les commentaires (sur la mise en œuvre, les outils numérique, la gestion de la classe, ...)

* Prise d'initiative

Questions	Compétences évaluées	Indicateurs de réussite
<p>Partie B</p> <p>1. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant pour le calcul de la fonction dérivée de g.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\text{derive}(330/(1+65* \exp(-0.4* t)), t) = \frac{8580e^{-0.4t}}{(1 + 65e^{-0.4t})^2}$ </div> <p>A partir de ce résultat, dresser le tableau de variation de la fonction g.</p> <hr style="border-top: 1px dashed #ccc;"/> <p>Version « en formation »</p> <p>1. a. Un élève utilise un logiciel de calcul formel et obtient le résultat suivant :</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\text{derive}(330/(1+65* \exp(-0.4* t)), t) = \frac{8580e^{-0.4t}}{(1 + 65e^{-0.4t})^2}$ </div> <p>A quoi cela lui sert il ?</p> <p>b. Retrouver $g'(t)$ par le calcul.</p> <p>c. Etudier le sens de variation de la fonction g.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Raisonner Bâtir un raisonnement. Faire le lien entre la fonction et sa dérivée. ▪ Calculer Exercer l'intelligence du calcul: organiser les différentes étapes d'un calcul. <hr style="border-top: 1px dashed #ccc;"/> <p>Compétences supplémentaires évaluées :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Raisonner Différencier le statut des énoncés mis en jeu. ▪ Calculer Contrôler les calculs du logiciel formel. 	<p>On valorisera</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ L'élève qui fait référence entre le signe de la dérivée et les variations. ▪ La démarche permettant d'aboutir au tableau de variations. ▪ Le calcul du signe du numérateur et dénominateur. ▪ Le calcul de l'image de 0. ▪ Le calcul de la limite en $+\infty$ <hr style="border-top: 1px dashed #ccc;"/> <p>On appréciera :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ L'aptitude de l'élève à reconnaitre la dérivée de la fonction g dans ce résultat de calcul formel. ▪ Mobilisation de connaissances et de méthodes nécessaires à calculer la dérivée et étudier son signe.
<p>2. Tracer la courbe représentative de la fonction g dans le repère ci-dessous.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Représenter ▪ Calculer 	<p>On valorisera :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Les cohérences avec le tableau de variation de la question précédente.

En bleu : Version « formation »

En vert : Les commentaires (sur la mise en œuvre, les outils numérique, la gestion de la classe, ...)

* Prise d'initiative

Questions	Compétences évaluées	Indicateurs de réussite
<p>3. En combien de temps aura-t-on plus de 30 000 vers ?</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Calculer Effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel). ▪ Représenter Choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique...) adapté pour traiter la question. ▪ Raisonner Avoir du recul sur son résultat 	<p>On valorisera différentes pistes de résolution :</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ L'utilisation du graphique pour faire une lecture de la solution ▪ L'utilisation de la table dans la calculatrice (discret) ▪ La mise en inéquation du problème : $g(t) > 300$ ▪ Le passage unité en centaine ▪ Savoir interpréter la solution de l'inéquation: $t > \frac{\ln\left(\frac{30}{19500}\right)}{-0,4}$ ▪ Vérifier la cohérence de son résultat
<p>4. Peut-on prévoir, à l'aide de ce modèle, une stabilisation du nombre de vers et à partir de quel moment ?</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Raisonner Chercher la limite par lecture graphique. ▪ Communiquer Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral. 	<p>On valorisera</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ La lecture graphique de la limite ▪ La stabilisation observée : que ce soit sur le graphique, ou sur la calculatrice <p>Une question donnant l'occasion de mettre en place un débat pour travailler la compétence « Communiquer » S'exprimer avec clarté et précision à l'oral et à l'écrit.</p>
<p><u>Version « en formation »</u></p> <p>5. Choisissez le modèle qui vous paraît le mieux décrire l'évolution du nombre de vers dans la boîte. Trouver un camarade qui a choisi l'autre modèle et essayez de le convaincre, en argumentant, que le vôtre est le meilleur modèle.</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Communiquer Développer une argumentation mathématique correcte à l'écrit ou à l'oral. 	<p><i>Indications de conduite de classe pour le professeur :</i> Sondage rapide pour former des binômes, 5 + 5 min d'échanges par binôme ; question : un élève a-t-il changé d'avis ? y a-t-il un avis qui domine ? Cette partie est ouverte à toute organisation mettant les élèves en situation d'argumenter leur point de vue, de s'approprier et de critiquer le point de vue contraire, d'arrêter un choix définitif personnel. Le professeur pourra filmer (tablette, téléphone) des débats et des argumentaires particulièrement intéressants, après étude, sélectionner ceux à présenter à toute la classe en vue d'une critique constructive des éléments de langage et de la communication, ainsi que la force des arguments utilisés (comparaison sur des graphiques, données, calculs, etc.).</p>

En bleu : Version « formation »

En vert : Les commentaires (sur la mise en œuvre, les outils numérique, la gestion de la classe, ...)

* Prise d'initiative