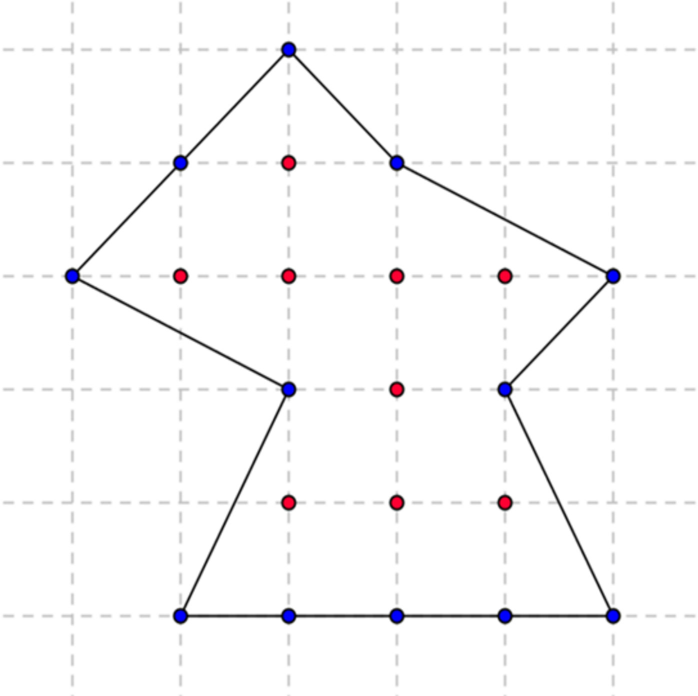
De l'Aire !

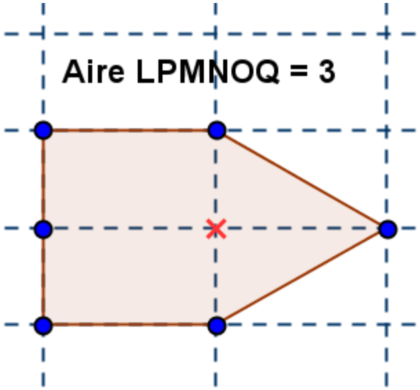
De l'aire : une formule magique !

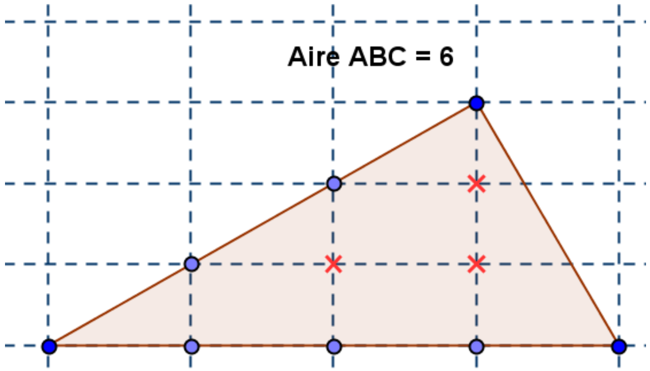
On cherche à calculer l'aire d'un polygone dont les sommets sont des points à coordonnées entières.

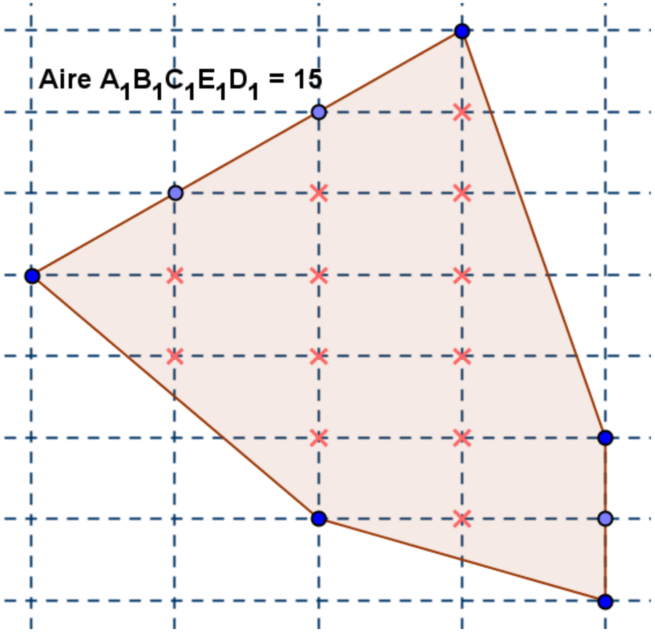


Quel lien y a-t-il entre le nombre de points dans le polygone et son aire ?

Avec un logiciel de géométrie dynamique







Aire	3	6	15
Point intérieur n_i	1	3	12
Points sur les côtés : n_C	6	8	8

$$A = \frac{n_C}{2} + n_i - 1$$

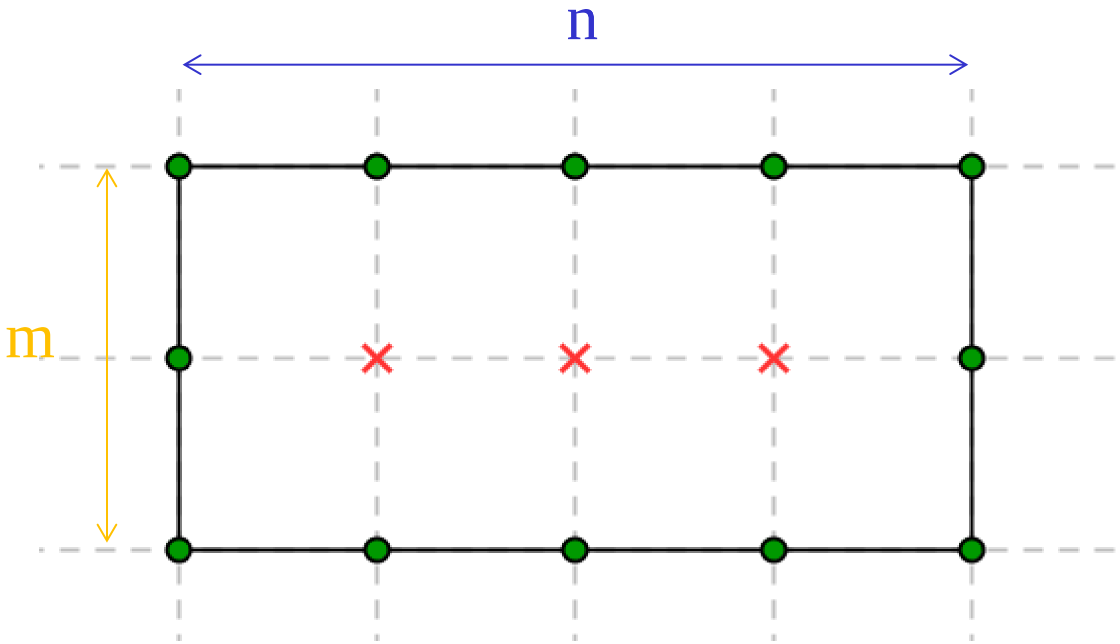
Une formule

$$A = \frac{n_C}{2} + n_i - 1$$

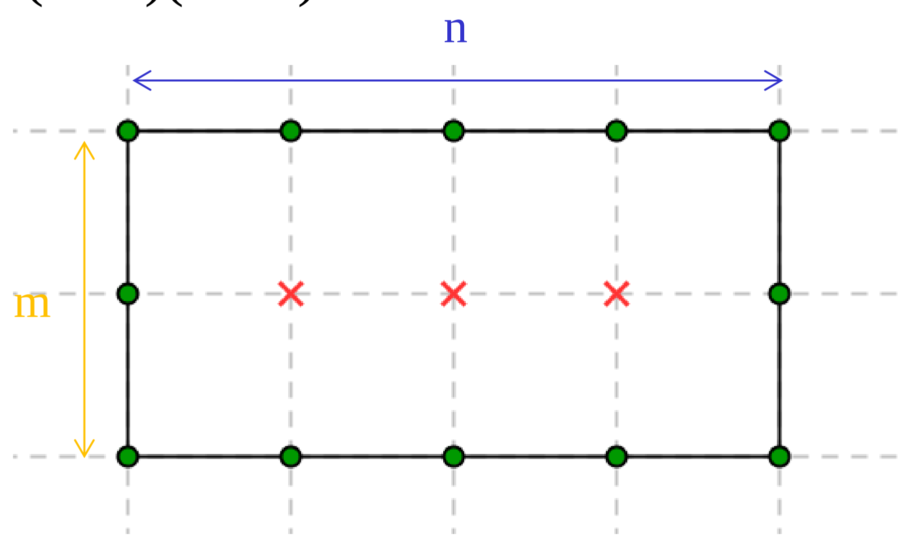
Avec n_C le nombre de points sur les côtés et n_i le nombre de points intérieurs.

Démonstration

Pour un rectangle



$$\begin{cases} n_C + n_i = \text{nombre total de points} = (n+1)(m+1) \\ n_C = n+1+m+n+m-1 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} n_C + n_i = (n+1)(m+1) \\ n_C = 2n+2m \end{cases}$$

n_C: nombre de points côtés

n_i : nombre de points intérieurs

Donc $\quad n+m = \dfrac{n_C}{2}$

Alors, $\quad n_C + n_i = nm + n + m + 1$

$$= A + \frac{n_c}{2} + 1$$

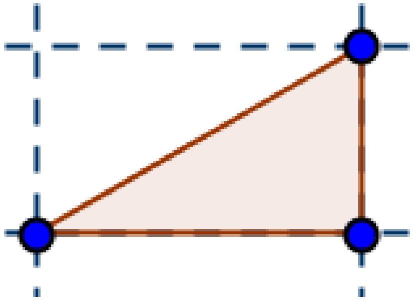
Ainsi, $\quad A = n_c + n_i - \dfrac{n_c}{2} - 1$

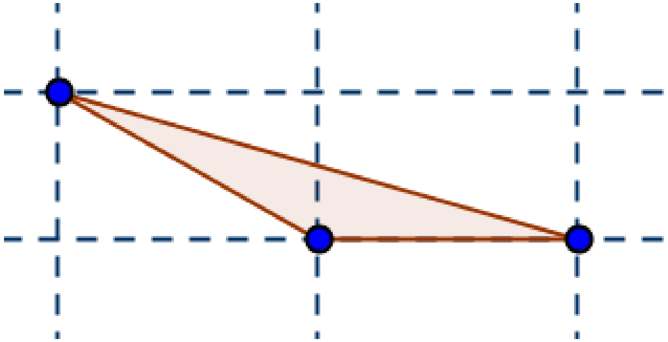
Donc, $\quad A = \dfrac{n_c}{2} + n_i - 1$

Généralisation à une figure quelconque

Un triangle élémentaire est un triangle n'ayant aucun point intérieur et trois points côtés (sommets du triangle).

Exemples :





Tout polygone peut être décomposé en triangles élémentaires.

découpage en triangles élémentaires

Démonstration par récurrence

On démontre que, pour tout polygone dont les sommets sont à coordonnées entières, composé de n triangles élémentaires ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$A = \frac{n_C}{2} + n_i - 1$$

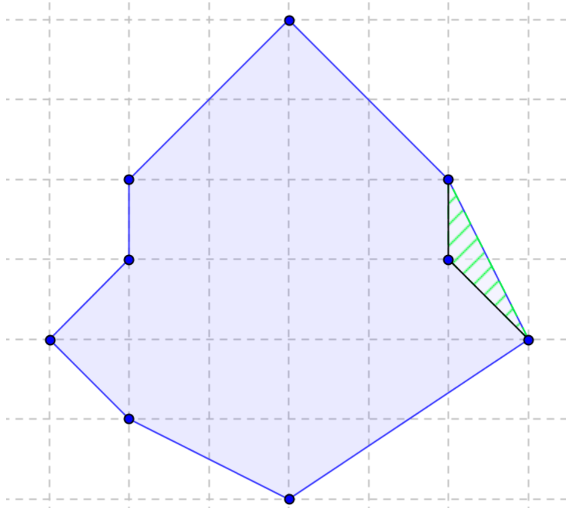
- <u>Initialisation</u> : $n = 1$

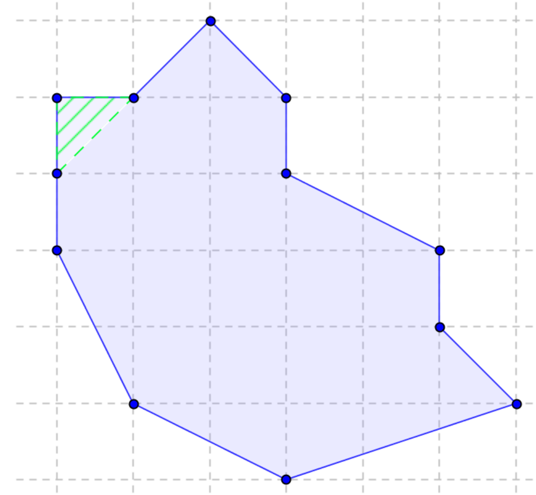
  Pour un triangle élémentaire, $A = \dfrac{1}{2}$.

- <u>Hérédité</u> : on suppose que pour un polygone composé de n triangles élémentaires (n fixé) $A = \dfrac{n_C}{2} + n_i - 1$.

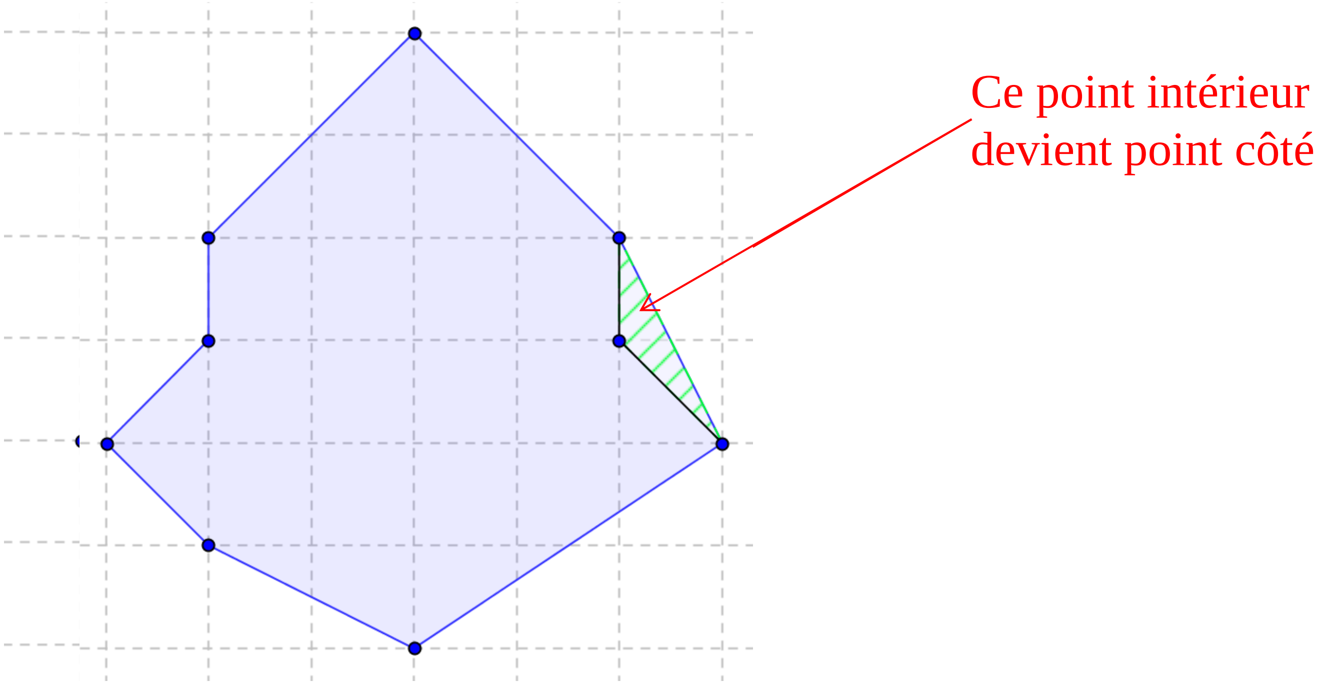
  On démontre que la formule est vraie pour un polygone composé de n+1 triangles élémentaires.

Deux cas sont à considérer :



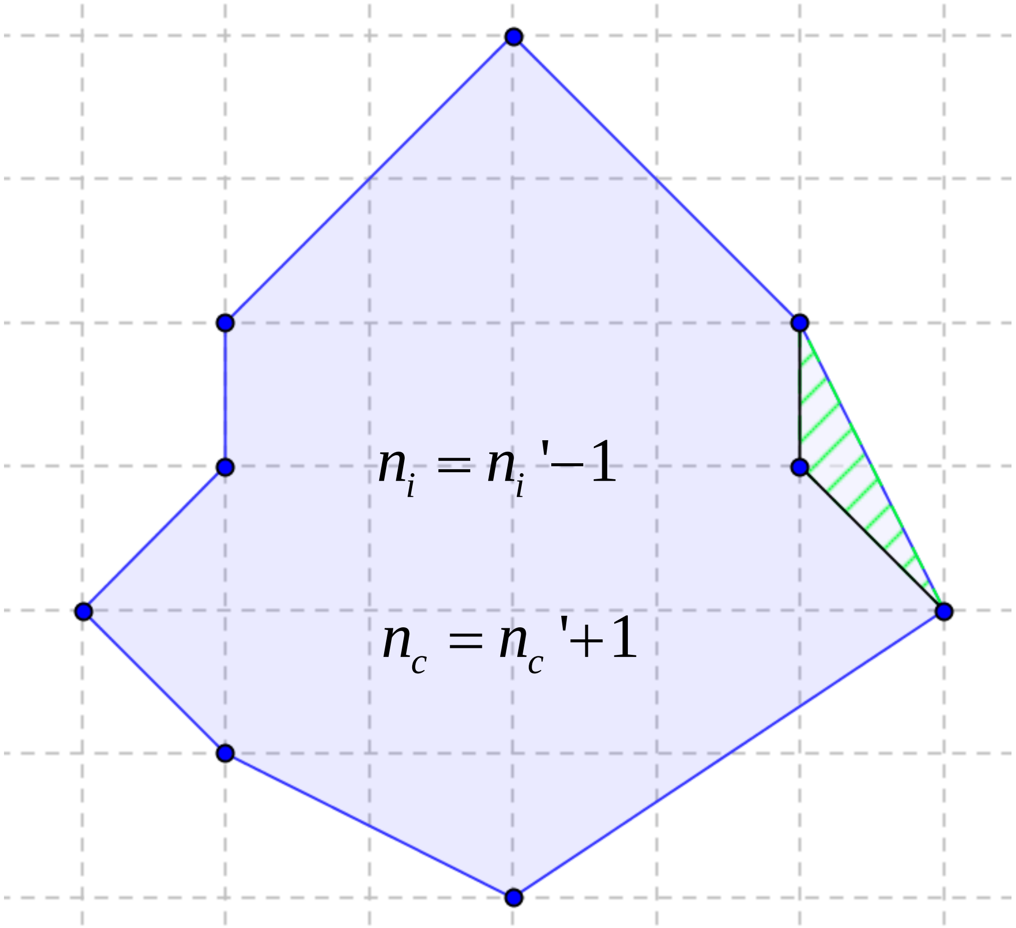


1^{er} cas

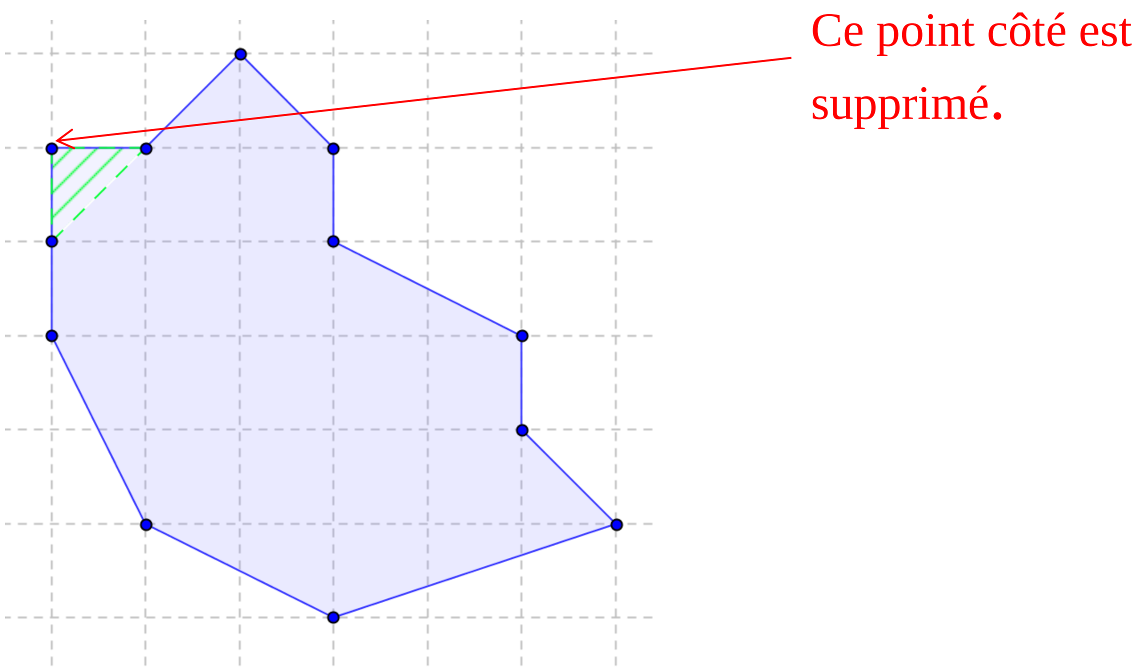


- Il y a suppression d'un point intérieur : $n_i = n_i' - 1$
- Il y a l'ajout d'un point côté : $n_C = n_C' + 1$

Avec n_C' le nombre de point côté de la nouvelle figure et n_i' le nombre de points intérieur de la figure à $n+1$ triangles élémentaires.


$n_i = n_i' - 1$
$n_c = n_c' + 1$

$2^{\text{ème}}$ cas



- Le nombre de point intérieur est identique : $n_i = n_i'$
- Il y a la suppression d'un point côté : $n_c = n_c' - 1$

Avec n_c' le nombre de point côté et n_i' le nombre de point intérieur de la figure à $n+1$ triangles élémentaires.

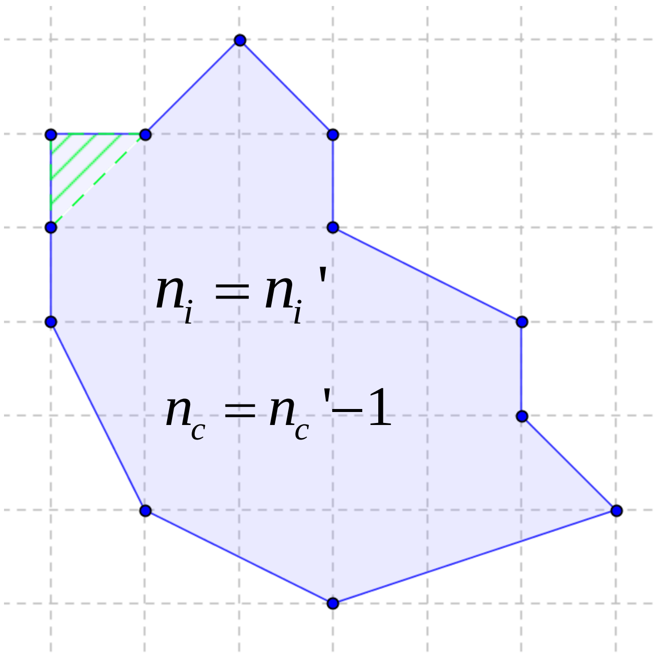
Donc :

$$A' = A + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n_c}{2} + n_i - 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n_c' - 1}{2} + n_i' - 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n_c'}{2} + n_i' - 1$$

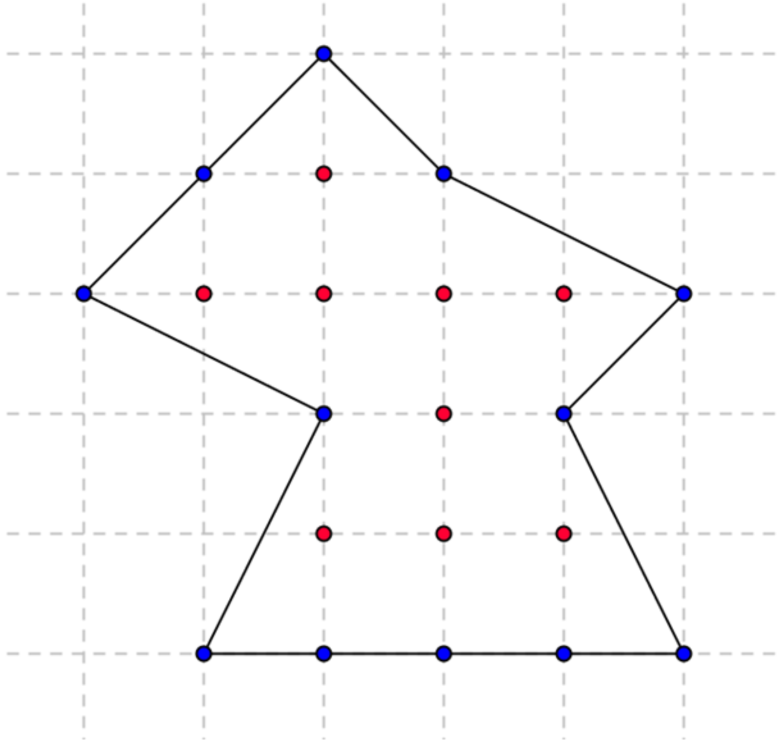


On conclut que la formule est vraie pour le 2ème cas.

A VOUS DE JOUER :

Avec la formule magique, trouver l'aire de la figure donnée.

$$A = \frac{n_C}{2} + n_i - 1$$



$n_i = 9$

$n_c = 12$

Donc : $A = \frac{12}{2} + 9 - 1$

$= 14$